



交通运输工程学报

*Journal of Traffic and Transportation Engineering*

ISSN 1671-1637, CN 61-1369/U

## 《交通运输工程学报》网络首发论文

题目： 下承式拱桥合理拱轴线的解析解与计算方法  
作者： 刘永健，张国靖，刘江  
网络首发日期： 2022-10-28  
引用格式： 刘永健，张国靖，刘江. 下承式拱桥合理拱轴线的解析解与计算方法[J/OL]. 交通运输工程学报.  
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1369.U.20221027.1709.002.html>



**网络首发：**在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认：**纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 下承式拱桥合理拱轴线的解析解与计算方法

刘永健<sup>1,2</sup>, 张国靖<sup>1</sup>, 刘江<sup>1,2</sup>

(1. 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064; 2. 长安大学 公路大型结构安全教育部工程研究中心, 陕西 西安 710064)

**摘要:**为了得到下承式拱桥合理拱轴线的解析解与计算方法, 建立了恒载作用模式和合理拱轴线微分方程, 得到合理拱轴线的解析解; 在解析解的基础上, 定义了主拱恒载占比系数, 得到了基于矢跨比和主拱恒载占比系数的合理拱轴线快速求解计算方法; 采用拱桥设计规范、工程案例与相关研究成果, 验证了本文方法的可靠性。研究表明: 下承式拱桥的恒载作用模式可等效为连续均布恒载+主拱恒载的形式, 合理拱轴线为悬链线, 相应的拱轴系数由矢跨比和主拱恒载占比系数共同决定; 拟合出的不同矢跨比下的拱轴系数与主拱恒载占比系数的函数关系式为线性相关关系, 决定系数大于 0.99, 说明拟合公式准确; 工程中下承式拱桥矢跨比的范围为 1/3~1/8, 相应的拱轴系数的范围为 1.000~1.792, 常见的矢跨比范围为 1/4~1/5, 相应的拱轴系数的范围为 1.000~1.465, 与工程案例中拱轴系数统计结果的吻合度较高, 说明计算结果可靠; 工程中常见主拱恒载占比系数的范围为 0.1~0.5, 对应的拱轴系数的范围为 1.102~1.364, 与拱桥设计规范中的取值范围接近, 证明了规范取值的合理性; 当主拱恒载占比系数小于 0.5 且矢跨比小于 1/7 时, 或主拱恒载占比系数小于 0.1 时, 拱轴系数接近于 1.000, 即合理拱轴线可采用二次抛物线; 利用查表法或简化公式法, 可以快速求得合理拱轴线方程; 与已有研究成果相比较, 主拱截面弯矩、偏心距和偏心距平方和的偏差均在 5%以内, 证明了本文计算方法的正确性。

**关键词:** 桥梁工程; 下承式拱桥; 合理拱轴线; 解析方程法; 拱轴系数; 主拱恒载占比

**中图分类号:** U442.5 **文献标志码:** A

## Analytical solution and calculation method of reasonable arch axis of through arch bridge

LIU Yong-jian<sup>1,2</sup>, ZHANG Guo-jing<sup>1</sup>, LIU Jiang<sup>1,2</sup>

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. Research Center of Highway Large Structure Engineering on Safety of Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China)

**Abstract:** To obtain the analytical solution and calculation method of the reasonable arch axis of through arch bridge, the dead load action mode and the differential equation of the reasonable arch axis were established, and the analytical solution of the reasonable arch axis was determined. Based on the analytical solution, the dead load ratio of main arch was defined. Based on the rise-span ratio and dead load ratio of main arch, a quick calculation method of the reasonable arch axis was obtained. The reliability of the proposed method was confirmed by arch bridge design specifications, engineering cases, and related research achievements. The results show that the dead load action mode of through arch bridge can be equivalent to the combination of continuous uniform dead load and arch dead load, the reasonable arch axis is catenary, and the corresponding arch axis coefficient is determined by the rise-span ratio and dead load ratio of main arch. The fitted functional relationships between the arch axis coefficients and dead load ratios of main arch under different rise-span ratios are a linear correlation, and the determination coefficients are greater than 0.99, indicating that the fitted equations are accurate. The rise-span ratios of through arch bridges are between 1/3 and 1/8 in engineering, and the range of the corresponding arch axis coefficients are between 1.000 and 1.792. The common rise-span ratios range from 1/4 to 1/5, and the corresponding arch axis coefficients range from 1.000 to 1.465. The calculation results are in good agreement with the statistical results of arch axis coefficients of engineering cases, indicating that the calculation results are reliable. The common dead load ratios of main arch range from 0.1 to 0.5, and the corresponding arch axis coefficients range from 1.102 to

**基金项目:** 国家重点研发计划 (2016YFC0701202); 国家自然科学基金项目<sup>1</sup>(51178051); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (300102219310)

**作者简介:** 刘永健 (1966-), 男, 江西玉山人, 长安大学教授, 工学博士, 从事桥梁工程研究。

1.364. The calculation results are close to the value ranges in the arch bridge design specification, which proves the rationality of value range of arch bridge design specification. When the dead load ratio of main arch is less than 0.5 and the rise-span ratio is less than 1/7, or the dead load ratio of main arch is less than 0.1, the arch axis coefficient is close to 1.000. As a result, the quadratic parabola can be used as reasonable arch axis. The reasonable arch axis equation can be obtained quickly by the look-up table method and simplified formula method. Compared with the mature research achievements, the deviations of bending moments, eccentricities and sums of squared eccentricities of main arch cross-section are within 5%, which proves the correctness of the solution method in this paper.

**Key words:** bridge engineering; through arch bridge; reasonable arch axis; analytical equation method; arch axis coefficient; dead load ratio of main arch

**Author resumes:** LIU Yong-jian (1966- ), male, professor, PhD, liuyongjian@chd.edu.cn.

**Foundation item:** National Key Research and Development Program of China (2016YFC0701202); National Natural Science Foundation of China (51178051); Fundamental Research Funds for the Central Universities (300102219310)

## 0 引言

合理拱轴线求解是拱桥研究中最重要的问题之一<sup>[1]</sup>。拱轴线是否合理,对拱桥的成桥内力状态、安全性、经济性和耐久性等有重要影响<sup>[2-3]</sup>。随着拱桥跨度不断增大,结构类型不断丰富,合理拱轴线求解问题变得越来越复杂<sup>[4]</sup>。例如,上承式、中承式和下承式拱桥的结构组成和布置不同,因此,拱桥的恒载组成、分布以及分配比例等较大的差异,导致合理拱轴线需要分结构类型求解<sup>[5]</sup>。下承式拱桥的恒载分布符合特定的规律,且恒载作用下合理拱轴线存在解析解,这对于提高拱轴线求解精度和效率有重要的意义。

合理拱轴线的求解方法主要分为两类,分别是曲线拟合法和解析方程法。曲线拟合法,即任意给定一条初始拱轴线,通过特定的数学方法对拱轴线进行优化,使得优化后的拱轴线满足弯矩最小、偏心距最小或弯曲变形能最小的目标<sup>[6-13]</sup>。曲线拟合法中最常用到的线形有悬链线、抛物线和样条曲线。曲线拟合法主要包含五点重合法、样条函数插值法、偏心距最小法和弯曲能量最小法等<sup>[6-13]</sup>。五点重合法采用的拟合曲线是悬链线,该方法的要点是保证拱轴线在拱脚、拱顶和四分点处弯矩为零<sup>[6]</sup>。样条函数插值法采用的拟合曲线是样条曲线,该方法的要点在于控制截面和优化目标的选择。罗辉<sup>[9]</sup>采用二次样条曲线拟合拱轴线,控制截面为拱顶、拱脚以及主拱等分点截面,优化目标为主拱控制截面正负弯

矩大致相等; Zhang 等<sup>[10]</sup>采用三次样条曲线拟合拱轴线,控制截面为拱顶、拱脚、四分点和八分点截面,优化目标为主拱控制截面偏心距最小; 刘毓湘等<sup>[11]</sup>采用四次样条曲线拟合拱轴线,控制截面为主拱的等分截面,优化目标为主拱控制截面的弯矩分布均匀。偏心距最小法常用的拟合曲线为高次抛物线,该方法的要点同样在于控制点和优化目标的选择。范重等<sup>[12]</sup>以巨型索拱结构为研究对象,采用高次抛物线拟合拱轴线,控制截面以拱顶、拱脚、四分点、八分点和等分点截面为主,优化目标为控制点与拟合拱轴线满足最小二乘关系; Shi 等<sup>[13]</sup>以拱形桥塔为研究对象,采用高次抛物线拟合拱轴线,控制截面以拱顶、拱脚和恒载离散点为主,优化目标为控制点与拟合拱轴线的偏离最小。上述几种拱轴线求解方法中,五点重合法是工程中较常用的方法,但该方法在大跨度拱桥中的适用性较差; 样条函数插值法的拟合精度较高,但由于该方法的控制参数较多,计算工作量较大,很少用在实际工程中; 其他的曲线拟合法也较少用于实际工程。曲线拟合法的拟合效果由控制截面的位置和数量、优化目标和拟合曲线类型等决定,目前还缺乏系统性的研究。此外,曲线拟合法在参数分析和结构优化方面,不具备解析方程法的优势。

解析方程法,即求静定拱的恒载压力线,将恒载压力线作为拱桥的合理拱轴线。解析方程法的求解思路通常为:确定拱桥的恒载作用模式,建立合理拱轴线微分方程,求解微分方程<sup>[5]</sup>,因此,解析方

程法的要点在于如何建立和求解微分方程<sup>[14-16]</sup>。任伟新等<sup>[17]</sup>针对大跨度空腹式拱桥，采用理论推导的方法，得到了以线形叠加的方式表示的合理拱轴线方程；胡常福等<sup>[18]</sup>在此基础上，将恒载作用的个数拓展到了任意数量，得到了更加通用的合理拱轴线方程；唐春艳<sup>[19]</sup>针对 T 构-系杆拱组合体系拱桥，通过对主拱恒载作近似处理，求得了该拱桥的合理拱轴线方程的近似解；Lewis 等<sup>[20]</sup>针对等截面空腹式拱桥，采用引入中间变量的方法，得到合理拱轴线方程的隐式解；Gil-Martín 等<sup>[21]</sup>以等截面实腹式拱桥为研究对象，同样采用引入中间变量的方法求得了合理拱轴线方程；Marano 等<sup>[22-23]</sup>针对恒等应力拱，以拱截面应力处处相等为控制条件，求得恒等应力拱的合理拱轴线方程，以及截面面积方程。任伟新等<sup>[17-18]</sup>的方法需要求解多个压力线方程，计算过程较为繁琐；唐春艳<sup>[19]</sup>的方法求解结果为近似解，求解精度受拱桥矢跨比等的影响较大；Lewis 等<sup>[20-21]</sup>的方法求得的是非显式解，拱轴线只能用坐标表示；Marano 等<sup>[22-23]</sup>的方法过于理想化，对实际工程的适用性较差。

总体而言，合理拱轴线求解重曲线拟合方法而轻解析方程方法，曲线拟合法重数学方法而轻机理研究，解析方程法重机理研究而轻简化计算方法研究。本文以下承式拱桥为研究对象，采用理论推导的方法，建立了下承式拱桥的恒载作用模式和合理拱轴线微分方程，得到合理拱轴线的解析解；在解析解的基础上，定义了主拱恒载占比系数，得到了基于矢跨比和主拱恒载占比系数的合理拱轴线的实用求解方法；采用拱桥设计规范、工程案例以及文献中成熟的研究方法，验证了本文方法的可靠性。

## 1 恒载作用模式

### 1.1 结构组成与恒载传递路径

计算合理拱轴线的首要步骤是先确定拱桥恒载（自重）的大小与分布，即恒载作用模式。下承式拱桥主要由主拱（拱圈或拱肋）、桥道结构（含二期恒载）、吊杆和系杆索等组成。下承式拱桥结构组成见图 1 (a)， $L$  为主拱跨径， $f$  为矢高， $l$  为相邻吊杆间距。桥道结构恒载通过吊杆以集中力的形式传递至

主拱，主拱在自身恒载和吊杆集中力的共同作用下产生轴向压力；轴向压力从拱顶传递至拱脚，并在拱脚处产生水平推力和竖向反力，其中水平推力由桥道结构或系杆索承担，竖向反力由下部结构承担。恒载传递路径见图 1 (b)，图中  $O$  为坐标原点（拱顶截面中心）， $x$  为水平向位置， $y$  为竖向位置； $N_a$  和  $N_b$  分别为主拱  $a$ 、 $b$  位置处的轴向压力； $H_a$  和  $H_b$  分别为主拱  $a$ 、 $b$  位置处的轴向压力； $g(x)$  为主拱沿跨径方向的恒载， $P_i$  为第  $i$  根吊杆的集中力； $q$  为桥道结构恒载，通常按均布恒载对待。拱桥（半跨）恒载分布见图 2，图中  $g$  为主拱沿弧长方向的恒载， $P_0$  和  $P_n$  分别为拱顶和拱脚附近吊杆集中力， $\varphi(x)$  为拱轴线切线与水平方向的夹角。当桥道结构作为系梁参与主拱受力时，合理拱轴线与拱梁刚度比、恒载和活载在梁和拱上的分配比例等密切相关，这将导致合理拱轴线的求解问题变得非常复杂，因此，本文的研究对象是以主拱作为主要承重结构的拱桥。

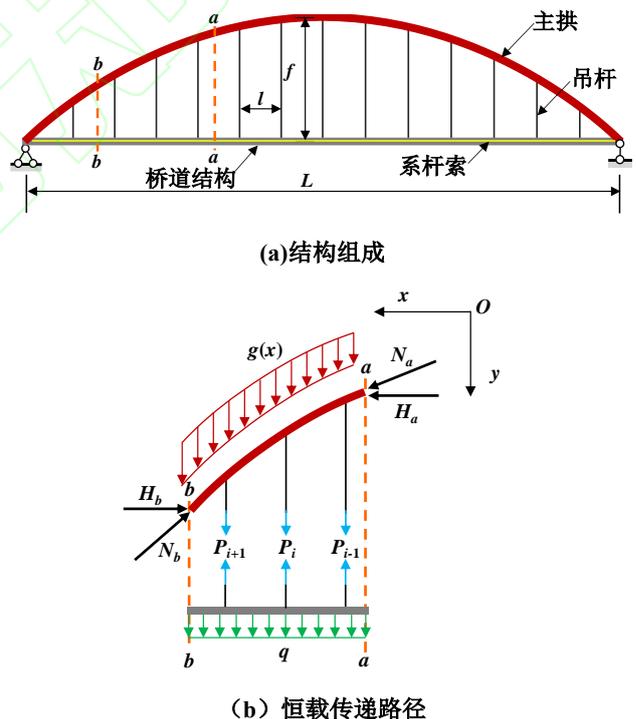


图 1 下承式拱桥结构组成与恒载传递路径

Fig.1 Structure composition and dead load transfer path of through arch bridge

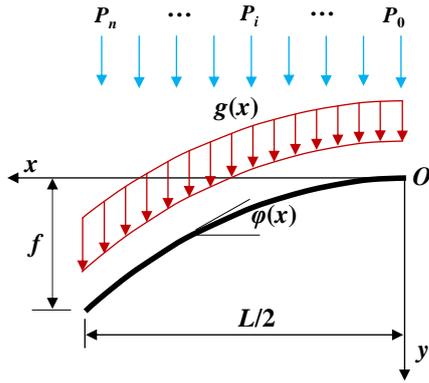


图2 下承式拱桥恒载分布

Fig.2 Dead load distribution of through arch bridge

### 1.2 主拱恒载作用模式

主拱可分为等截面主拱和变截面主拱。等截面主拱恒载作用模式有确定的函数关系式，而变截面拱的恒载作用模式尚无明确的函数关系式，通常按等截面拱处理<sup>[19-20]</sup>。实际工程中，90%以上的下承式拱桥的跨径在300m以下，且主拱多为等截面形式<sup>[24]</sup>。此外，《公路钢管混凝土拱桥设计规范》(JTG/T D65-06—2015)和《钢管混凝土拱桥技术规范》(GB 50923—2013)中均规定拱桥跨径小于300m时，主拱宜采用等截面形式。等截面主拱恒载  $g(x)$  为

$$g(x) = \frac{g}{\cos[\varphi(x)]} = g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (1)$$

### 1.3 吊杆集中力作用模式

吊杆集中力为非连续分布恒载，需进行连续化处理。本文提出了集中力连续化原则：①集中力连续化前后的恒载分布模式基本一致，如均匀分布的集中力应等效为连续均匀分布恒载；②集中力与连续分布恒载的总量相等；③集中力作用下主拱竖向反力与水平推力与连续分布恒载作用下主拱竖向反力与水平推力相等；④集中力与连续分布恒载作用下的主拱关键截面（拱顶、拱脚以及集中力作用的截面等）的内力相等。吊杆集中力的连续化方法及计算参数见图3。下承式拱桥中，为保证桥道结构设计经济性，吊杆集中力分布较为均匀，且吊杆等间距布置<sup>[24]</sup>，因此，吊杆力为均匀分布的集中力，即  $P_0 = P_i = P_n$ 。吊杆集中力可连续化为连续均布恒载。

通过计算可得连续均布恒载的大小为  $P_0/l$ 。这与易云焜<sup>[25]</sup>通过等效膜张力法得到的结论是一致的。吊杆力主要由桥道结构恒载产生（吊杆自重通常忽略不计），且  $P_0/l$  在数值上与桥道结构恒载相等，因此，下文中采用桥道结构恒载代替吊杆集中力等效后的连续均布恒载。通常，靠近拱脚的吊杆集中力比其他吊杆小，且由于短吊杆数量较少，产生的水平推力较小，对拱轴线的影 响有限，因此，吊杆集中力连续化为连续均布恒载是合理的。

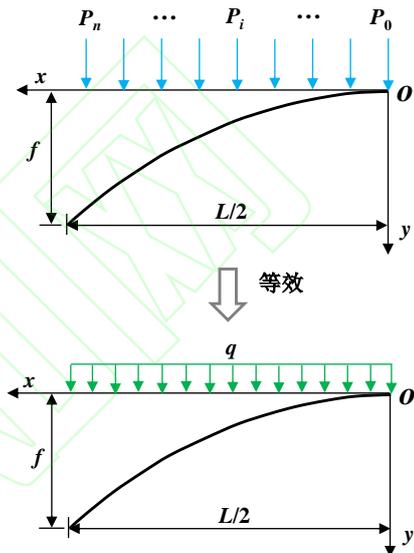


图3 集中力连续化

Fig.3 Continuity of concentrated loads

### 1.4 全桥恒载作用模式

全桥恒载作用模式与计算参数见图4。全桥恒载  $q(x)$  为主拱恒载  $g(x)$  与桥道结构恒载  $q$  的线性叠加，即

$$q(x) = q + g(x) = q + g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2)$$

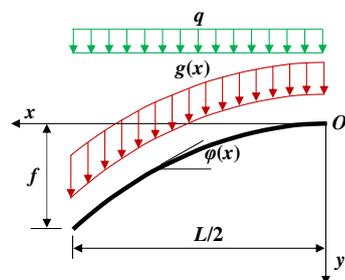


图4 下承式拱桥恒载作用模式与计算参数

Fig.4 Dead load mode and calculation parameters of through arch bridge

## 2 合理拱轴线的解析解

### 2.1 建立合理拱轴线方程

主拱抗弯刚度较大,在恒载作用下的变形较小,符合小变形假定。此外,合理拱轴线的求解暂不考虑拱轴弹性压缩的影响。合理拱轴线计算参数与主拱平衡隔离体见图5,图中 $dx$ 为平衡隔离体微段 $u-v$ 在 $x$ 轴上的投影, $N$ 为主拱截面轴向压力, $H$ 为拱脚水平推力。由 $x$ 方向合力为零和 $y$ 方向合力为零,可得

$$N \cos[\varphi(x)] - (N + dN) \cos[(\varphi(x) + d\varphi(x))] = 0 \quad (3)$$

$$N \sin[\varphi(x)] + q(x)dx - (N + dN) \sin[(\varphi(x) + d\varphi(x))] = 0 \quad (4)$$

分别求解式(3)和(4),可得

$$N \cos[\varphi(x)] = H \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} \{N \sin[\varphi(x)]\} = q(x) \quad (6)$$

将式(5)代入式(6)中,可得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q(x)}{H} \quad (7)$$

式(7)为合理拱轴线求解的微分方程。将式(2)代入式(7)中,可得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{H} + \frac{g}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (8)$$

式(8)为非线性微分方程,求解较为困难。主要难点在于 $\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ 项导致方程无法求解出显式解。为此,本文通过主拱恒载等效的方法,简化主拱恒载函数表达形式,使得式(8)可解。

研究表明:主拱恒载作用下的拱轴线为悬链线,相应的拱轴系数 $m$ (拱脚与拱顶恒载集度之比)为 $1/\cos[\varphi(L/2)]$ ,其中 $\varphi(L/2)$ 为拱脚处拱轴切线与水平面的夹角<sup>[20]</sup>,因此,主拱恒载集度的分布符合从拱顶向拱脚随 $y$ 坐标线性增大的规律,即 $g(x) = g + \gamma y$ 的分布模式,其中 $\gamma$ 为等效重度。主拱恒载为

$$g(x) = g + \frac{\{1/\cos[\varphi(L/2)] - 1\} gy}{f} \quad (9)$$

$$\text{令 } \gamma = \{1/\cos[\varphi(L/2)] - 1\} g / f$$

则主拱恒载变为

$$g(x) = g + \gamma y \quad (10)$$

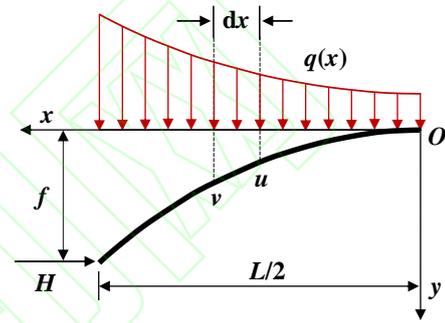
从而全桥恒载变为

$$q(x) = q + g + \gamma y \quad (11)$$

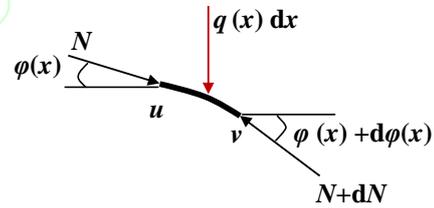
将式(11)代入式(7)中,可得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q + g}{H} + \frac{\gamma y}{H} \quad (12)$$

式(12)为二阶线性微分方程,可解。



(a) 计算参数



(b) 平衡隔离体

图5 合理拱轴线计算参数与平衡隔离体

Fig.5 Calculation parameters of reasonable arch axis and balanced isolator

### 2.2 合理拱轴线方程求解

$$\text{令 } \gamma / H = \mu^2$$

则式(12)变为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \mu^2 y = \frac{q + g}{H} \quad (13)$$

求解式(13),得到合理拱轴线方程的通解为

$$y = A \cosh(\mu x) + B \sinh(\mu x) - \frac{q + g}{\gamma} \quad (14)$$

式中: $A$ 和 $B$ 为常数,可由边界条件 $x=0$ 、 $y=0$ 和 $x=L/2$ 、 $y'=0$ 求得。求解结果为

$$A = \frac{q+g}{\gamma}, \quad B = 0$$

从而合理拱轴线方程变为

$$y = \frac{q+g}{\gamma} [\cosh(\mu x) - 1] \quad (15)$$

式(15)为悬链线方程,说明均布恒载与等截面主拱恒载共同作用的合理拱轴线为悬链线。式(15)中参数 $\mu$ 可由边界条件 $x=L/2, y=f$ 求得。求解得到的参数 $\mu$ 为

$$\mu = \frac{2 \ln \left[ \frac{\gamma f + q + g}{q + g} + \sqrt{\left( \frac{\gamma f + q + g}{\gamma} \right)^2 - 1} \right]}{L} \quad (16)$$

通过观察式(16),可以发现式中有一项为 $\frac{\gamma f + q + g}{q + g}$ ,其物理意义是拱脚与拱顶恒载集度之比,即拱轴系数 $m$ ,可等效为

$$m = \frac{q + g / \cos[\varphi(L/2)]}{q + g} \quad (17)$$

$$\text{令} \quad k = \mu L / 2$$

则式(15)就变为了工程中常用的含拱轴系数 $m$ 的悬链线方程,即

$$y = \frac{f}{m-1} \left[ \cosh\left(\frac{2kx}{L}\right) - 1 \right] \quad (18)$$

$k$ 还可通过拱轴系数 $m$ 求得,等式为

$$k = \ln\left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \quad (19)$$

由式(18)可知,对于给定跨径和矢高的拱桥,只需要确定了拱轴系数 $m$ ,即可求出合理拱轴线方程。

### 2.3 合理拱轴线方程求解流程

合理拱轴线的求解需要进行迭代计算,直到满足工程要求为止。迭代计算流程见图6,具体求解步骤为:①任意给定一条悬链线作为初始拱轴线,并给定截面尺寸等初步设计资料;②计算拱桥恒载参数 $g$ 、 $q$ 和 $\gamma$ ,确定拱桥恒载作用模式;③计算拱脚处拱轴切线与水平面的夹角余弦值 $\cos[\varphi(L/2)]$ ;④将 $g$ 、 $q$ 和 $\cos[\varphi(L/2)]$ 代入式(17)中求拱轴系数 $m$ ,将求得的拱轴系数 $m$ 代入式(19)中求参数 $k$ ;⑤

将 $L$ 、 $f$ 、 $m$ 和 $k$ 代入式(18)中求出拱轴线方程。⑥进行迭代计算,直至满足判别条件:前后两次迭代计算得到的拱轴系数的差值小于0.005,即可停止迭代计算,最后一次计算得到的拱轴线方程即为所求的合理拱轴线方程。通常,迭代3次就能够满足精度要求,且迭代计算可通过计算机程序实现,计算效率较高。

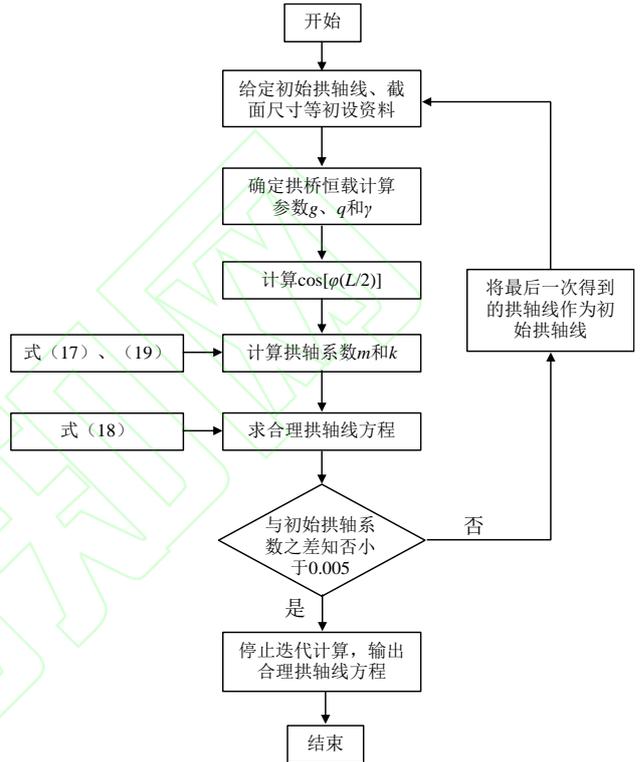


图6 合理拱轴线迭代计算流程

Fig.6 Iterative calculation process of reasonable arch axis

### 3 合理拱轴线快速求解计算方法

本文第2小节给出了下承式拱桥的合理拱轴线解析解和详细的求解方法。然而,实际应用中尚需要进行迭代计算,求解效率相对较低。通过观察合理拱轴线方程,发现其主要由矢跨比 $f/L$ 、主拱沿弧长方向的恒载 $g$ 以及桥道结构恒载 $q$ 决定,因此,在合理拱轴线解析解的基础上,本文提出了基于主拱恒载占比系数和矢跨比的合理拱轴线快速求解的计算方法。

#### 3.1 主拱恒载占比系数

对于等截面主拱, $g$ 沿弧长方向是恒定的, $q$ 沿拱跨方向是恒定的,因此,主拱恒载占比系数可用 $\lambda$

表示,  $\lambda$  与  $g$  和  $q$  的关系为

$$\lambda = \frac{g}{g+q} \quad (20)$$

将式 (20) 代入式 (17), 可得含主拱恒载占比系数  $\lambda$  的拱轴系数  $m$  表达式, 为

$$m = \lambda \left\{ \frac{1}{\cos[\varphi(L/2)]} - 1 \right\} + 1 \quad (21)$$

由式 (21) 可以看出:  $m$  由  $\lambda$  和  $\cos[\varphi(L/2)]$  共同决定, 而  $\cos[\varphi(L/2)]$  由  $f/L$  和  $\lambda$  共同决定, 因此  $m$  由  $\lambda$  和  $f/L$  共同决定。

$\lambda$  表面上由  $g$  和  $q$  决定, 实际上与道路等级、活载等级、主拱跨径、桥道结构跨径、结构材料类型等

密切相关。 $g$  通常随跨径增大而增大, 而桥道结构的跨径通常并不随主拱跨径的增大而增大, 大多介于 8 ~ 16m 之间<sup>[24]</sup>, 因此, 对于桥道结构等宽且主拱和桥道结构均采用同种材料的拱桥,  $\lambda$  随跨径的增大而增大,  $m$  亦会随着跨径的增大而增大。对于采用相同桥道结构的拱桥, 钢拱桥、钢管混凝土拱桥和钢筋混凝土拱桥的  $\lambda$  逐渐增大。 $\lambda$  的理论值介于 0~1 之间, 其中  $\lambda$  为 0 时表示主拱恒载为零, 这种情况在实际工程中是不可能发生的, 因此, 仅作为参数分析的下限值。 $\lambda$  为 1 表示桥道结构恒载为零, 这种情况对应的是拱桥为裸拱, 作为参数分析的上限值。本文通过对多座下承式拱桥  $\lambda$  的统计分析, 发现  $\lambda$  取值范围介于 0 ~ 0.5 之间。10 座拱桥的  $\lambda$  统计结果见表 1。

表 1 10 座拱桥  $\lambda$  的统计结果

Tab.1  $\lambda$  statistical results of 10 arch bridges

序号	结构型式	跨径/m	桥宽/m	矢跨比	截面型式	桥道结构	桥道梁跨径/m	主拱恒载占比系数
1	钢管混凝土拱桥	46.0	18.0	1/3.0	单圆管型	钢筋混凝土结构	4.0	0.119
2	钢管混凝土拱桥	75.0	18.0	1/5.0	哑铃型	钢筋混凝土结构	4.7	0.176
3	钢管混凝土拱桥	95.5	22.4	1/4.5	哑铃型	钢筋混凝土结构	7.1	0.316
4	钢管混凝土拱桥	100.0	5.5	1/5.0	哑铃型	钢筋混凝土结构	4.1	0.251
5	钢箱拱桥	118.0	39.4	1/4.0	箱型	钢-混组合结构	6.0	0.110
6	钢管混凝土拱桥	136.0	11.5	1/5.0	桁架型	钢筋混凝土结构	8.1	0.352
7	钢管混凝土拱桥	150.0	23.5	1/4.5	桁架型	钢筋混凝土结构	8.0	0.431
8	钢筋混凝土拱桥	280.0	26.0	1/5.0	箱型	钢筋混凝土结构	12.0	0.485
9	钢管混凝土拱桥	300.0	24.0	1/5.5	桁架型	钢筋混凝土结构	10.0	0.337
10	钢桁拱桥	390.0	12.0	1/4.5	桁架型	钢-混组合结构	12.0	0.459

表 2 拱轴系数计算结果

Tab.2 Calculation results of arch axis coefficients

主拱恒载占比系数	矢跨比					
	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.068	1.042	1.028	1.02	1.015	1.012
0.2	1.138	1.085	1.057	1.041	1.031	1.024
0.3	1.211	1.129	1.086	1.062	1.046	1.036
0.4	1.286	1.174	1.116	1.083	1.062	1.048
0.5	1.364	1.220	1.146	1.104	1.078	1.060
0.6	1.444	1.267	1.177	1.126	1.094	1.072
0.7	1.527	1.315	1.208	1.148	1.110	1.085
0.8	1.612	1.364	1.240	1.170	1.126	1.097
0.9	1.701	1.414	1.272	1.192	1.143	1.110
1.0	1.792	1.465	1.305	1.215	1.159	1.123

### 3.2 计算拱轴系数

本文依据图 6 所示的计算流程，编写了计算程序，求得了不同  $f/L$  和  $\lambda$  下的  $m$ 。 $f/L$  按工程中常见的范围来取，即  $f/L$  为 1/3、1/4、1/5、1/6、1/7、1/8<sup>[24,26]</sup>。表 2 列出了不同  $\lambda$  和  $f/L$  下的  $m$  计算结果，图 7 展示了  $m$  随  $\lambda$  和  $f/L$  的变化规律。 $m$  的下限为 1，即拱轴线为二次抛物线； $m$  的上限为  $1/[\cos\varphi(L/2)]$ ，可以看出：当  $f/L$  一定时， $m$  随  $\lambda$  的增大而增大，即主拱恒载比重越高，拱轴系数越大；当  $\lambda$  一定时， $m$  随  $f/L$  的增大而增大，即拱越陡，拱轴系数越大；对于不同的  $f/L$ ， $m$  随  $\lambda$  的增长速率不同， $f/L$  越大， $m$  的增长速率越快；对于不同的  $\lambda$ ， $m$  随  $f/L$  的增长的速率也不同， $\lambda$  越大， $m$  的增长速率越快；当  $f/L \leq 1/3$  时， $m$  随  $\lambda$  的增长幅度较大；当  $f/L \leq 1/7$  时， $m$  随  $\lambda$  的增长幅度很小； $\lambda$  对陡拱的拱轴系数影响较大，对坦拱的拱轴系数影响较小；当  $\lambda \leq 0.5$  且  $f/L \leq 1/7$ ，或  $\lambda \leq 0.1$  时， $m$  值接近于 1.000，即合理拱轴线接近于二次抛物线。

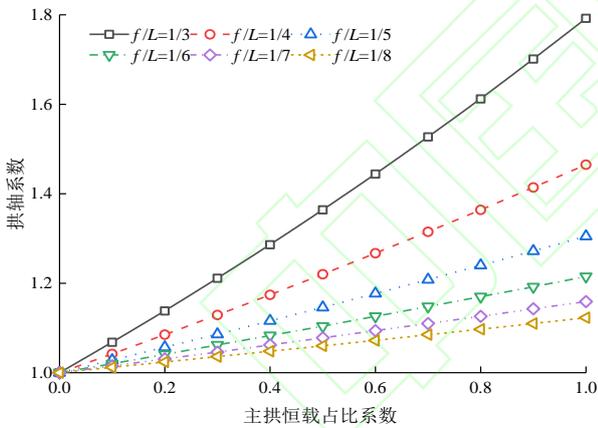


图 7  $m$  随  $\lambda$  和  $f/L$  的变化规律

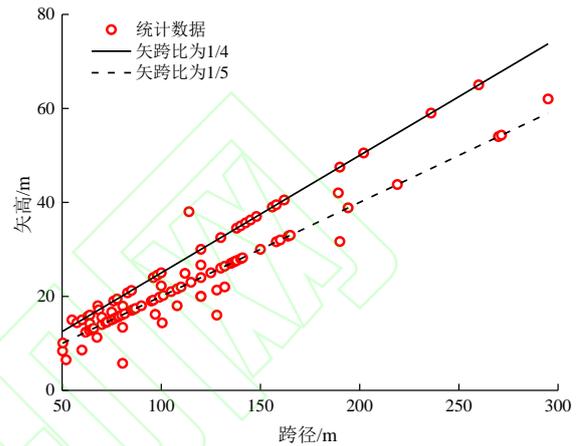
Fig.7 Variation laws of  $m$  with  $\lambda$  and  $f/L$

### 3.3 与规范和工程中的拱轴系数比较

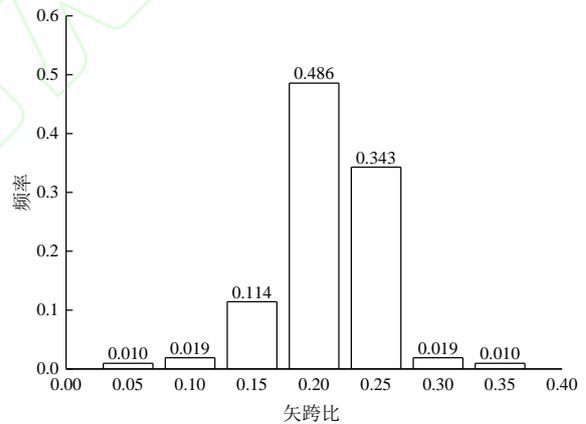
#### 3.3.1 与规范中的拱轴系数比较

本文统计了 100 余座下承式拱桥的矢跨比，结果见图 8，可以看出：超过 90% 的拱桥的  $f/L$  介于 1/8 ~ 1/3 之间，且约 83% 的拱桥的  $f/L$  介于 1/4 ~ 1/5 之间，与《公路钢管混凝土拱桥设计规范》(JTG/T D65-06—2015) 中规定的下承式拱桥的  $f/L$  宜介于 1/4.5

~ 1/5.5 之间基本一致；对于工程中常见的  $f/L$  的范围 1/5 ~ 1/4 的情况，本文计算得到的  $m$  的上限为 1.465 (表 2)，不超过 1.500；对于工程中常见的  $\lambda$  范围 0 ~ 0.5，本文计算得到的  $m$  的上限为 1.364，不超过 1.500，这与《公路钢管混凝土拱桥设计规范》(JTG/T D65-06—2015) 和《钢管混凝土拱桥技术规范》(GB 50923—2013) 中规定下承式拱桥的  $m$  不宜大于 1.5 是一致的。



(a) 分布范围



(b) 频率分布

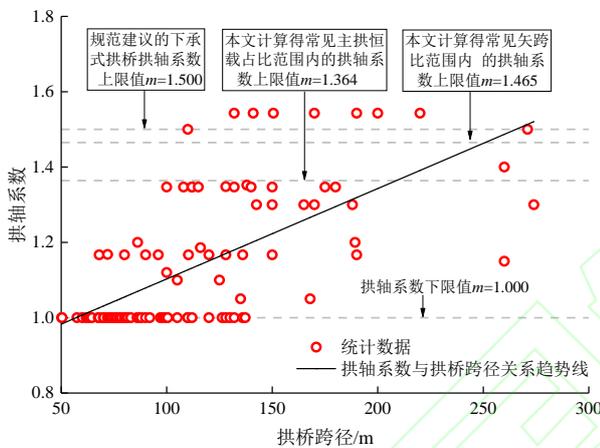
图 8 矢跨比统计结果

Fig.8 Statistical results of rise-span ratios

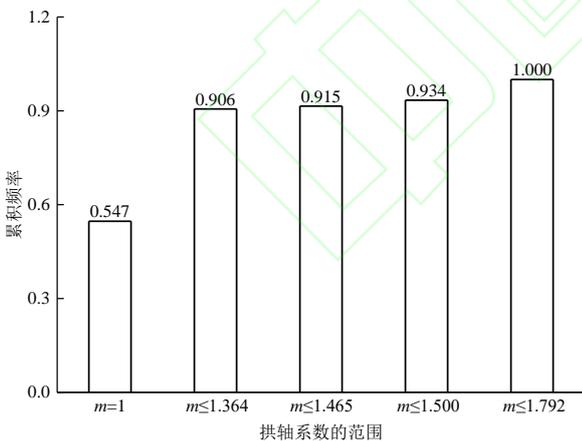
#### 3.3.2 与工程中的拱轴系数比较

本文统计了 100 余座下承式拱桥的拱轴系数，结果见图 9，可以看出：下承式拱桥的  $m$  介于 1.000~1.543 之间，在本文计算结果范围以内； $m$  为 1.000 (拱轴线为二次抛物线) 的拱桥数量占比为 54.7%； $m \leq 1.364$  的拱桥数量占比为 91.5%； $m \leq 1.465$  的拱桥数量占比为 91.5%； $m \leq 1.5$  的拱桥数量占比为 93.4%； $m \leq 1.792$  的拱桥数量占比为 100%。

上述统计结果再次说明，实际工程中的  $m$  与本文计算结果和规范规定吻合度较高。此外，本文对  $m$  与  $L$  之间的关系进行拟合，结果见图 9 (a)。 $m$  与  $L$  的决定系数  $R^2$  为 0.4105，虽然二者线性相关程度较差，但总体的上  $m$  与  $L$  呈正相关关系。这是由于拱桥跨径增大，通常  $\lambda$  也随之增大，而  $m$  随  $\lambda$  的增大而增大，因此， $m$  会随着  $L$  的增大而增大。对于统计的  $m$  为 1.000 的拱桥，跨径范围为 50~137 m，且其中 72.4% 的拱桥跨径不超过 100 m。工程中为了计算方便，跨径较小的下承式拱桥的拱轴线多采用二次抛物线。



(a) 分布范围



(b) 频率分布

图 9 下承式拱桥拱轴系数统计结果

Fig.9 Arch axis coefficients statistical results of through arch bridge

本文对表 1 统计的 10 座拱桥，按本文方法计算出了拱轴系数  $m$ ，并与原设计拱轴系数进行了比较，

结果见表 3，可以看出：拱轴系数计算结果与原设计均有偏差，但偏差  $\Delta m$  大多不超过 0.1；导致偏差的原因主要有两方面：一方面，本文计算结果仅考虑了恒载，而未考虑拱轴轴向压缩、活载等因素，计算结果与实际工程有一定的偏差；另一方面，实际工程中的拱轴线并不一定是合理的，这与设计师的设计水平、拱桥施工方法、结构体系等因素有关。若作为初选拱轴系数，上述偏差是可以接受的。

### 3.4 拱轴系数计算公式拟合

给定  $f/L$  和  $\lambda$ ，可以通过查表 2 得到  $m$ 。当  $f/L$  和  $\lambda$  介于以上参数之间时，可以通过线性插值的方法求得  $m$ 。由图 7 可以看出：在给定  $f/L$  的条件下， $\lambda$  与  $m$  近似呈线性关系。此外，通过观察式 (21) 所示的

拱轴系数表达式，式中  $\left\{ \frac{1}{\cos[\varphi(L/2)]} - 1 \right\}$  项由  $f/L$  决

定。给定  $f/L$  时，该项就变为常数项，则式 (21) 可以近似用一次函数来拟合。采用表 2 中的数据，拟合出了不同  $f/L$  下的  $\lambda$  与  $m$  的关系式，见式 (22) ~ (27)，可以看出： $f/L$  一定时， $\lambda$  与  $m$  之间是一次函数关系，决定系数  $R^2$  大于 0.99。表 2 中的迭代计算结果与拟合公式计算结果对比见图 10。迭代计算结果与拟合公式计算结果比值的均值均为 1.000，最大标准差为 0.012，最大变异系数为 1.2%，再次证明公式拟合精度非常高。基于上述分析，对于给定  $f/L$  的条件下，只要知道  $\lambda$ ，即可求出对应的  $m$ ，从而求得相应的合理拱轴线方程。

表 4 不同  $f/L$  下  $\lambda$  与  $m$  的关系式拟合结果

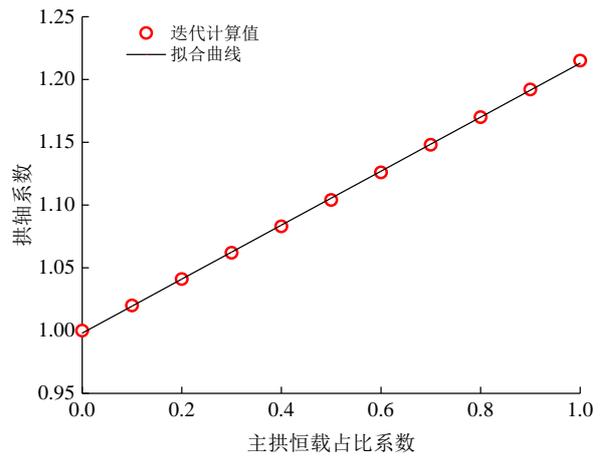
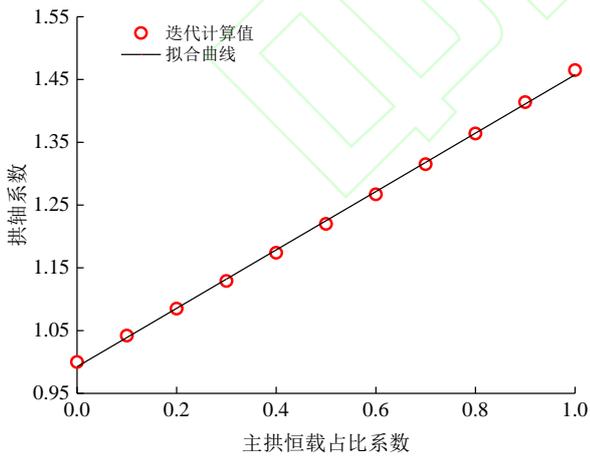
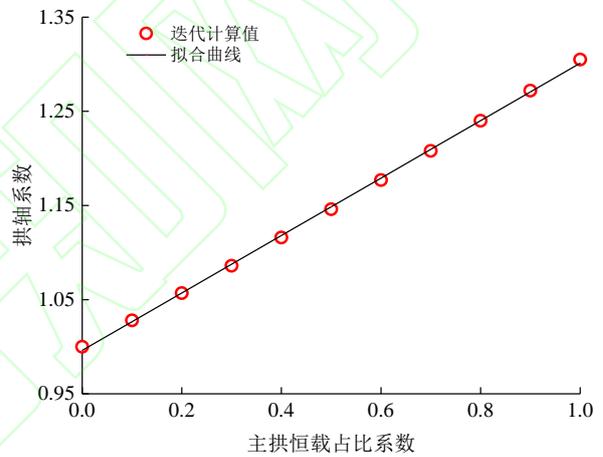
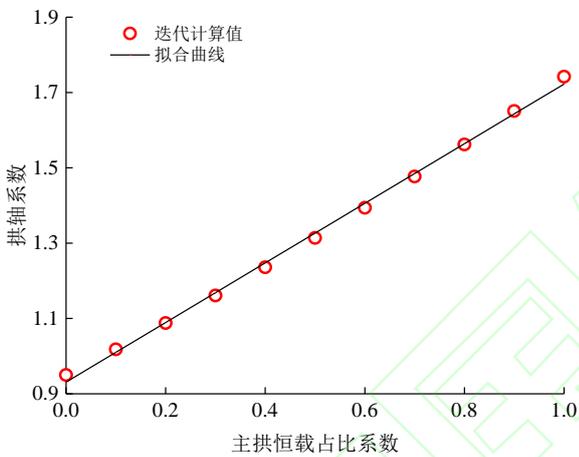
Tab.4 Fitting results of relationship between  $\lambda$  and  $m$  under different rise-span ratios

矢跨比	拟合公式	决定系数	公式编号
1/3	$m = 0.7913\lambda + 0.9810$	0.9979	(22)
1/4	$m = 0.4650\lambda + 0.9925$	0.9991	(23)
1/5	$m = 0.3050\lambda + 0.9961$	0.9995	(24)
1/6	$m = 0.2150\lambda + 0.9980$	0.9997	(25)
1/7	$m = 0.1593\lambda + 0.9989$	0.9999	(26)
1/8	$m = 0.1225\lambda + 0.9989$	0.9999	(27)

表 3 10 座拱桥拱轴系数计算结果

Tab.3 Calculation results of arch axis coefficients of 10 arch bridges

序号	跨径 / m	矢跨比	主拱恒载占比系数	本文计算拱轴系数	原设计拱轴系数	拱轴系数偏差
1	46.0	1/3.0	0.119	1.075	1.000	-0.075
2	75.0	1/5.0	0.176	1.050	1.000	-0.050
3	95.5	1/4.5	0.316	1.116	1.347	0.231
4	100.0	1/5.0	0.251	1.073	1.167	0.094
5	118.0	1/4.0	0.110	1.044	1.100	0.056
6	136.0	1/5.0	0.352	1.103	1.167	0.064
7	150.0	1/4.5	0.431	1.160	1.167	0.007
8	280.0	1/5.0	0.485	1.144	1.167	0.023
9	300.0	1/5.5	0.337	1.085	1.100	0.015
10	390.0	1/4.5	0.459	1.171	1.200	0.029



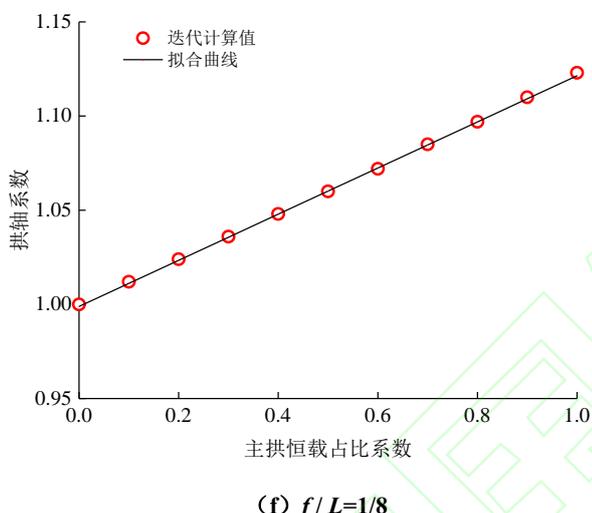
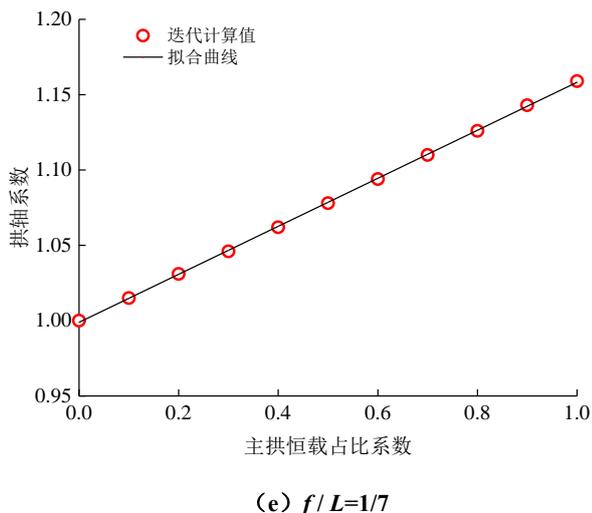


图 10 拱轴系数计算公式拟合

Fig.10 Calculation formulas fitting of arch axis coefficients

### 3.5 合理拱轴线快速求解方法计算流程

图 6 给出了合理拱轴线计算方法, 但该方法需要进行迭代计算, 计算效率相对较低。在合理拱轴线解析解的基础上, 本节给出基于主拱恒载占比系数  $\lambda$  和矢跨比  $f/L$  的合理拱轴线快速求解方法计算, 求解流程见图 11。具体的求解步骤为: ① 任意给定一条悬链线作为初始拱轴线, 并给定截面尺寸等初步设计资料; ② 计算拱桥恒载参数  $g$  和  $q$ ; ③ 按式 (20) 计算主拱恒载占比系数  $\lambda$ ; ④ 在求得矢跨比  $f/L$  和主拱恒载占比系数  $\lambda$  的条件下, 按式 (22) ~ (27) 计算拱轴系数  $m$ ; ⑤ 按式 (19) 求解  $k$ ; ⑥ 将  $m$  和  $k$  代入式 (18) 中, 即可求得合理拱轴线方程。

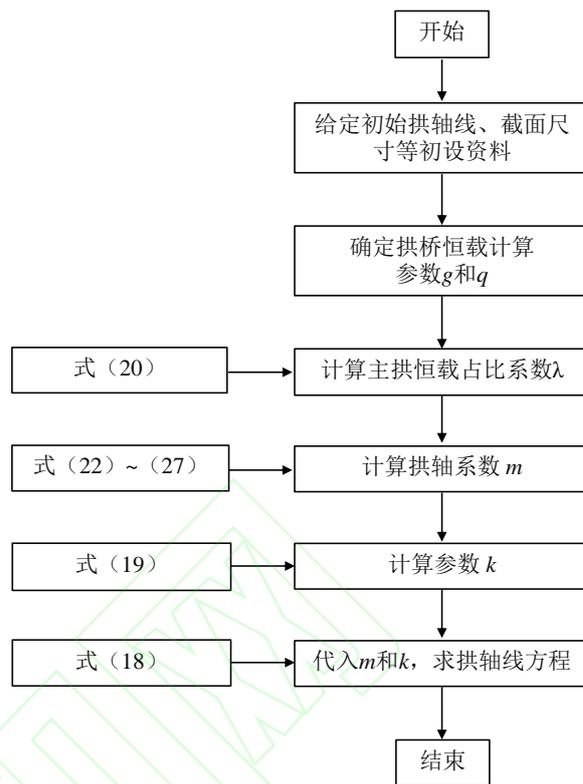


图 11 合理拱轴线快速求解流程

Fig.11 Flow chart of quick solution of reasonable arch axis

## 4 算例分析与方法验证

本文以一座下承式拱桥为案例, 依照本文提出的计算方法求解合理拱轴线方程。同时, 采用文献中经过验证的方法求解合理拱轴线方程, 并将按文献方法计算的结果与本文方法计算的结果进行对比, 以验证本文计算方法的可靠性。对比的方法主要有五点重合法, 以及唐春艳<sup>[19]</sup>、任伟新等<sup>[17]</sup>、Lewis<sup>[20]</sup>的方法。其中, 五点重合法属于曲线拟合法, 唐春艳<sup>[19]</sup>、任伟新等<sup>[17]</sup>和 Lewis<sup>[20]</sup>采用的方法属于解析方程法, 且文献中研究的恒载作用模式与本文相同, 具有较好的可比性。

### 4.1 算例概况及恒载分布模式

算例为一座下承式钢管混凝土拱桥, 主拱跨径  $L$  为 150 m, 矢跨比为 1/5, 拱桥立面布置见图 12 (a)。主拱采用哑铃型钢管混凝土截面, 截面高度为 2.5 m, 上、下弦管外径均为 1m, 腹腔内不填混凝土, 主拱断面见图 12 (b)。弦管和腹腔钢板厚度均为 16 mm, 钢材型号为 Q345, 混凝土标号为 C50。桥道结构为钢-混凝土组合梁, 计算跨径  $l$  为 6 m (吊

杆间距)。恒载作用下,全桥的吊杆集中力见图 12 (a),编号从拱顶到拱脚为  $P_0 \sim P_{11}$ ,且沿拱顶对称分布。吊杆集中力的平均值为 361kN,标准差为 7.5kN,变异系数为 2.1%。吊杆集中力等效为连续均

布恒载,  $q$  为  $60.15\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$  (作用于单根拱肋的恒载集度)。主拱恒载集度  $g$  为  $45.69\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。全桥恒载分布模式及计算参数见图 13。

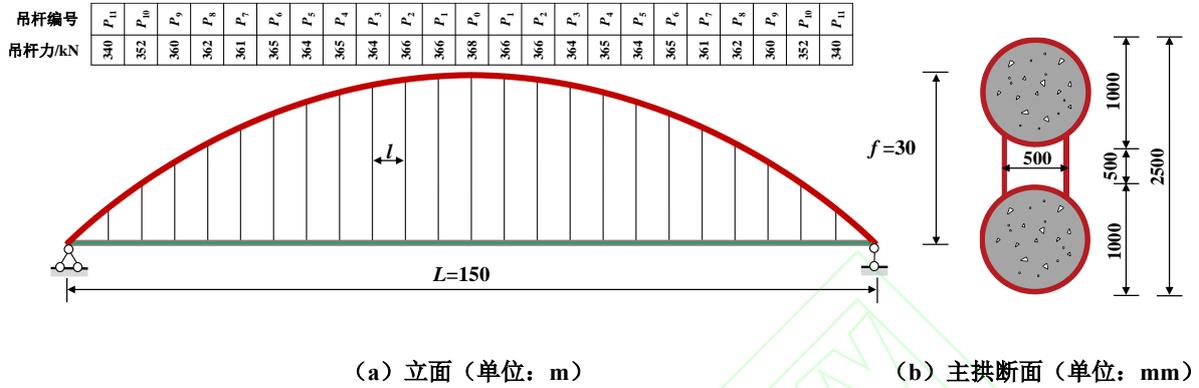


图 12 拱桥概况

Fig.12 Overview of arch bridge

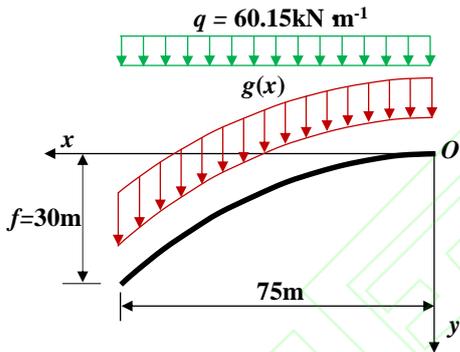


图 13 恒载分布模式及计算参数

Fig.13 Dead load distribution mode and calculation parameters

## 4.2 合理拱轴线求解

### 4.2.1 按本文方法求解合理拱轴线

该恒载作用模式下的合理拱轴线为悬链线。主拱矢跨比为 1/5, 计算得到主拱恒载占比系数  $\lambda$  为 0.432。按拟合公式 (24) 可以求得拱轴系数  $m$  为 1.128, 因此, 按本文方法求得的合理拱轴线方程为

$$y = 234.375[\cosh(0.0067x) - 1]$$

### 4.2.2 按五点重合法求解合理拱轴线

五点重合法采用的拟合曲线是悬链线, 通过多次迭代计算求得的拱轴系数为 1.100, 因此, 按五点重合法求得的合理拱轴线方程为

$$y = 300.000[\cosh(0.0059x) - 1]$$

### 4.2.3 按唐春艳<sup>[19]</sup>的方法求解合理拱轴线

按唐春艳<sup>[19]</sup>的方法, 求得的合理拱轴线也是悬链线, 拱轴系数为 1.132, 因此, 按唐春艳<sup>[19]</sup>的方法求得的拱轴线方程为

$$y = 227.273[\cosh(0.0068x) - 1]$$

### 4.2.4 按任伟新<sup>[17]</sup>的方法求解合理拱轴线

按任伟新<sup>[17]</sup>的方法, 求得的合理拱轴线为二次抛物线与悬链线的叠加线, 合理拱轴线方程为

$$y = 0.0029x^2 + 43.672[\cosh(0.0102x) - 1]$$

### 4.2.5 按 Lewis<sup>[20]</sup>的方法求解合理拱轴线

按 Lewis<sup>[20]</sup>的方法, 无法得到  $x$  与  $y$  直接相关的合理拱轴线方程, 因此, 本文仅列出了合理拱轴线上的控制点坐标 (半跨), 见表 5。

表 5 拱轴线坐标

Tab.5 Arch axis coordinates

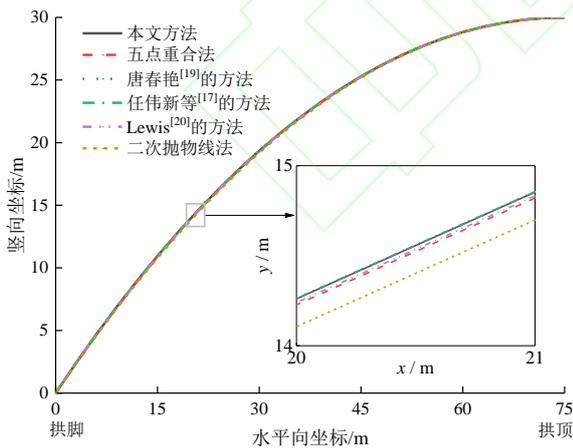
水平向坐标/m	竖向坐标/m	水平向坐标/m	竖向坐标/m
0.000	0.000	39.000	8.010
3.000	0.048	42.000	9.297
6.000	0.190	45.000	10.681
9.000	0.426	48.000	12.164
12.000	0.757	51.000	13.744
15.000	1.179	54.000	15.422
18.000	1.671	57.000	17.202

21.000	2.316	60.000	19.081
24.000	3.026	63.000	21.061
27.000	3.831	66.000	23.143
30.000	4.731	69.000	25.327
33.000	5.727	72.000	27.614
36.000	6.820	75.000	30.000

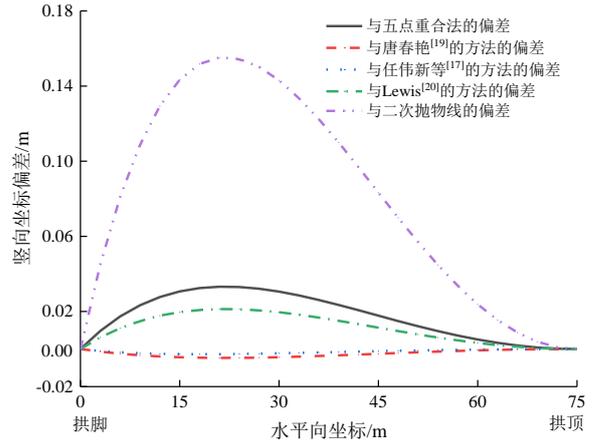
### 4.3 结果比较

#### 4.3.1 线形偏差比较

拱轴线坐标采用计算机程序求解，以减小由小数位数保留不当所导致的线形偏差。将上述 5 种方法的求得的合理拱轴线，另外再加上工程中常用的二次抛物线，共 6 条拱轴线进行比较分析。下文称将二次抛物线作为拱轴线的方法为二次抛物线法。为阅读方便，图 14~ 图 16 中均以拱脚为坐标原点。合理拱轴线计算结果见图 14 (a)，可以看出，6 条拱轴线之间有一定的偏差。其他 5 条拱轴线与本文方法得到的合理拱轴线竖向偏差  $\Delta y$  的计算结果见图 14 (b)，可以看出，其他 5 条拱轴线与本文方法计算得到的拱轴线的偏差  $\Delta y$  从小到大的排序为：任伟新等<sup>[17]</sup>的方法、唐春艳<sup>[19]</sup>的方法、Lewis<sup>[20]</sup>的方法、五点重合法、二次抛物线法，最大偏差分别为-0.003、-0.005、0.024、0.033 和 0.155m，均出现在 1/8 拱跨附近。



(a) 拱轴线 (半跨)



(b) 拱轴线偏差

图 14 合理拱轴线求解结果比较

Fig.14 Comparison of solution results of reasonable arch axis

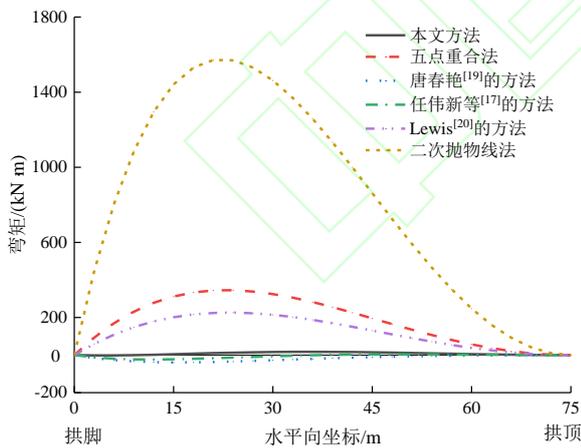
#### 4.3.2 截面弯矩与偏心距比较

合理拱轴线是通过三铰拱桥得到的，而实际桥梁是无铰拱桥。按三铰拱计算结构内力，可以验证计算结果的可靠性；按无铰拱计算结构内力，可以分析三铰拱恒载压力线在无铰拱中的适用性。图 15 (a) 为按三铰拱计算得到的主拱截面弯矩分布情况，表 6 列出了最大弯矩和最大偏心距等计算结果，可以看出：6 条拱轴线截面均存在一定的弯矩，即 6 种方法得到的结果无法做到 100%使得截面弯矩为零；这六种方法中，本文方法、唐春艳<sup>[19]</sup>的方法和任伟新等<sup>[17]</sup>的方法得到的拱轴线截面弯矩和偏心距最小，最大偏心距为 0.003m，与 2.5m 的拱肋截面高度相比，可以忽略不计；其次是 Lewis<sup>[20]</sup>的方法和五点重合法，拱肋截面弯矩和偏心距略大于本文方法、唐春艳<sup>[19]</sup>的方法和任伟新等<sup>[17]</sup>的方法；拱肋截面弯矩和偏心距最大的是二次抛物线法，最大弯矩约为本文方法的 90 倍，偏心距约为本文方法的 68 倍。图 15 (b) 为按无铰拱计算得到的主拱截面弯矩分布情况，表 6 列出了最大弯矩和最大偏心距等计算结果，可以看出：不同方法得到的截面弯矩和偏心距最大值的排序与三铰拱类似，本文方法、唐春艳<sup>[19]</sup>的方法和任伟新等<sup>[17]</sup>的方法得到的拱脚截面弯矩和偏心距最小，数值接近，且拱脚弯矩约为拱顶弯矩的 2 倍；五点重合法得到拱脚截面弯矩和偏心距均约为

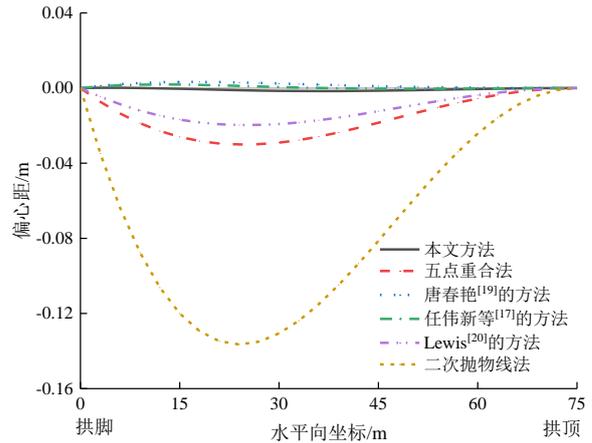
本文方法的 1.2 倍，拱顶截面弯矩和偏心距均约为本文方法的 0.8 倍；Lewis<sup>[20]</sup>的方法得到的计算结果与五点重合法较为接近；以二次抛物线作为拱轴线，截面最大负弯矩出现在拱脚，最大正弯矩出现在 1/4 拱跨附近；此外二次抛物线拱脚截面弯矩约为本文方法的 2 倍，拱顶截面正弯矩约为本文方法的 0.2 倍，即以二次抛物线作为拱轴线，对拱顶截面有利，对拱脚截面不利，且还增加了控制截面。

无铰拱的合理拱轴线拱轴线与压力线存在最小二乘的关系，即主拱截面偏心距平方和最小，即可认为拱轴线是最合理的。求解上述六种方法得到的主拱截面偏心距平方和，结果见图 17，可以看出：六种方法中，主拱截面偏心距平方和由小到大排序为：本文方法和任伟新等<sup>[17]</sup>的方法，唐春艳<sup>[19]</sup>的方法，Lewis<sup>[20]</sup>的方法，五点重合法，二次抛物线法。

通过对几种不同方法的比较，验证了本文方法的可靠性，同时证明了本文方法计算得到的合理拱轴线精度高、偏差小、内力分布合理等优点。通过对拱桥案例的分析计算，总结了上述 6 种求解方法特点，见表 7，可以看出，与其他方法相比，本文方法在计算精度、计算效率、计算难易程度、工程适用性等方面均具有显著的优势。



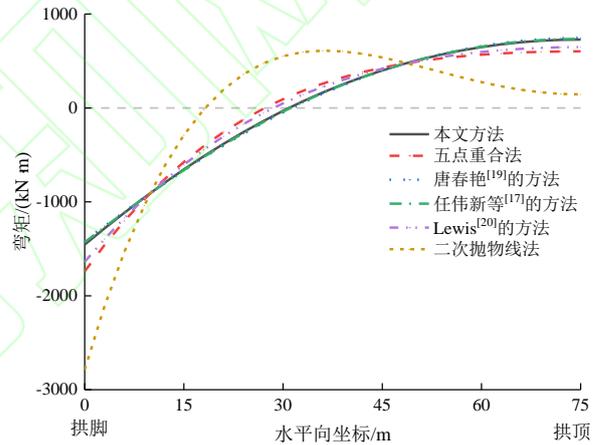
(a) 弯矩分布



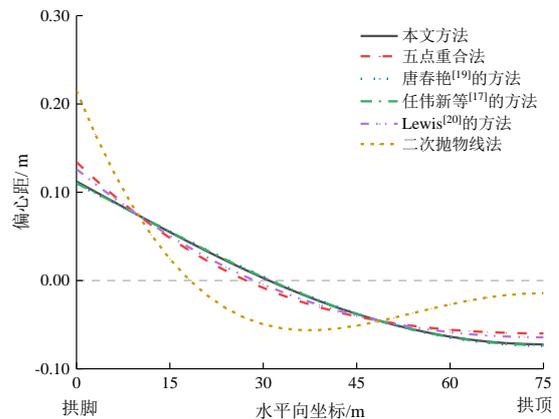
(b) 偏心距分布

图 15 三铰拱弯矩和偏心距比较

Fig.15 Comparison of bending moments and eccentricities of three-hinged arch



(a) 弯矩分布



(b) 偏心距分布

图 16 无铰拱弯矩和偏心距比较

Fig.16 Comparison of bending moments and eccentricities of hinged arch

表 6 最大弯矩和最大偏心距计算结果

Tab.6 Calculation results of maximum bending moments and maximum eccentricities

方法	三铰拱		无铰拱		
	最大弯矩/(kN m)	最大偏心距/m	最大弯矩/(kN m)	最大偏心距/m	偏心距平方和/m <sup>2</sup>
本文方法	17.5	-0.002	-1455.3	0.112	0.182
五点重合法	345.7	-0.030	-1739.3	0.134	0.196
唐春艳 <sup>[19]</sup> 的方法	-39.0	0.003	-1415.0	0.109	0.186
任伟新等 <sup>[17]</sup> 的方法	-23.6	0.002	-1429.7	0.110	0.182
Lewis <sup>[20]</sup> 的方法	259.2	-0.021	-1664.5	0.128	0.191
二次抛物线	1571.5	-0.136	-2785.9	0.215	0.256

表 7 六种求解方法的特点比较

Tab.7 Characteristic comparison of 6 solution methods

方法	计算精度	计算效率	计算难易程度	工程适用性	是否揭示了拱轴线的本质	拱桥初步设计阶段的适用性
本文方法	高	高	容易	适用	是	适用
五点重合法	较高	低	容易	较适用	否	较适用
唐春艳 <sup>[19]</sup> 的方法	较高	高	容易	较适用	是	适用
任伟新等 <sup>[17]</sup> 的方法	高	较高	较容易	适用	否	较适用
Lewis <sup>[20]</sup> 的方法	较高	较低	较难	较适用	否	不太适用
二次抛物线法	低	高	容易	不适用	否	较适用

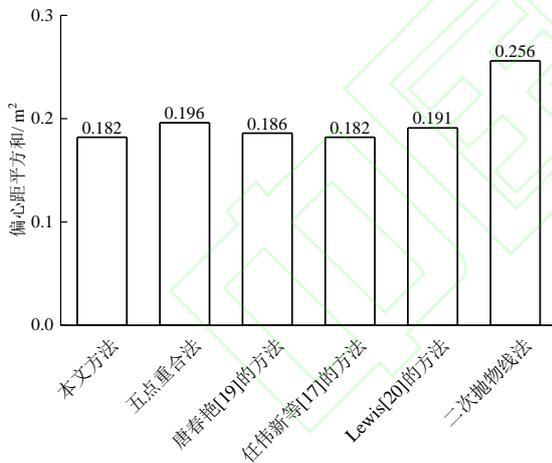


图 17 拱轴线偏心距平方和比较

Fig.17 Comparison of square sums of eccentricities of arch axis

## 5 结论

(1) 本文通过理论推导得到了恒载作用下的下承式拱桥的合理拱轴线的解析解及快速求解计算方法，并通过拱桥设计规范、工程案例以及文献中成熟的研究成果，验证了本文方法的可靠性。

(2) 主拱恒载和桥道结构恒载的分配比例，对

合理拱轴线有决定性的影响。主拱恒载占比越小，悬链线的拱轴系数越小。工程中常见主拱恒载占比系数介于 0.1 ~ 0.5 之间，且当主拱恒载占比系数小于 0.2 时，合理拱轴线接近于二次抛物线。

(3) 拱轴系数由矢跨比和主拱恒载占比系数共同决定。拱轴系数与主拱恒载占比系数为线性相关关系，决定系数大于 0.99。

(4) 本文提出的合理拱轴线的简化计算方法，可通过查表法和公式法实现快速求解。该方法在计算精度、计算效率、计算难易程度、工程适用性等方面均具有显著的优势，且特别适用于下承式拱桥合理拱轴线的初选。

(5) 下承式拱桥多为梁拱组合体系结构，桥道梁与主拱协同受力，桥道梁承担恒载的比例对拱轴线的选取有一定的影响。本文缺少对该影响因素的考虑，因此，后续的研究将考虑桥道梁对合理拱轴线的影

## 参考文献

### References:

- [1] BLOCK P, DEJONG M, OCHSENDORF J. As hangs the flexible line: equilibrium of masonry arches[J]. Nexus Network Journal, 2006, 8(2): 13-24.
- [2] LEWIS W J, RUSSELL J M, LI T Q. Moment-less arches for reduced stress state. Comparisons with conventional arch forms[J]. Computers and Structures, 2021, 251: 106524.
- [3] NIKOLIĆ D. Catenary arch of finite thickness as the optimal arch shape[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 60(5): 1957-1966.
- [4] 陈宝春,刘君平.世界拱桥建设与技术发展综述[J].交通运输工程学报,2020,20(1):27-41.  
CHEN Bao-chun, LIU Jun-ping. Review of construction and technology development of arch bridges in the world[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2020, 20(1): 27-41. (in Chinese)
- [5] ZHANG Guo-jing, LIU Yong-jian, ZHAO Wei, et al. Optimal arch shape of long-span open-spandrel arch bridges under vertical permanent loads [J]. Structures, 2022, 45: 1012-1030.
- [6] 侯春辉,宋顺心.基于 APDL 语言的拱轴线优化及立柱布置研究 [J]. 铁道工程学报,2017,34(10):55-59.  
HOU Chun-hui, SONG Shun-xin. Research on the optimization of arch-axis and column layout based on APDL language[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2017, 34(10): 55-59. (in Chinese)
- [7] 宰国军,周志祥.钢箱砼组合拱桥的拱轴线优化算法研究[J]. 土木建筑与环境工程, 2014, 36 (S1): 20-23.  
ZAI Guo-jun, ZHOU Zhi-xiang. Optimization algorithm research on the arch axis of steel box-concrete composite arch bridge[J]. Journal of Civil, Architectural and Environmental Engineering, 2014, 36(S1): 20-23. (in Chinese)
- [8] 蒋启平.三次样条插值确定拱桥合理拱轴线的方法探讨[J].武汉理工大学学报(交通科学与工程版),2001, 25(1):101-104.  
JIANG Qi-ping. A study of method of determining rational arch axis using three order spline interpolation[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science and Engineering), 2001, 25(1): 101-104. (in Chinese)
- [9] 罗辉.一种新型的拱轴线及拱圈优化设计[J].桥梁建设,1997, 27(2):14-17.  
LUO Hui. A new type of arch axis curve and optimization design of arch ring[J]. Bridge Construction, 1997, 27(2):14-17. (in Chinese)
- [10] ZHANG Xue-song, LIANG Ning-yi, LU Xiaohong, et al. Optimization method for solving the reasonable arch axis of long-span CFST arch bridges[J]. Advances in Civil Engineering, 2019, 2019: 7235656.
- [11] 刘毓湘,高敬红.基于 4 次样条函数拱轴线优化设计的 T-V 求解法[J].公路交通科技,2007, 24(6):80-85.  
LIU Yu-xiang, GAO Jing-hong. Topkis-Veinott feasible direction method for optimum axis of arch bridge based on quartic spline function[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2007, 24(6): 80-85. (in Chinese)
- [12] 范重,胡纯炆,刘先明,等.鄂尔多斯东胜体育场巨型拱索结构设计优化 [J]. 建筑结构学报,2016,37(6):9-18.  
FAN Zhong, HU Chun-yang, LIU Xian-ming, et al. Optimized design of giant arch-cable structure of the Ordos Dongsheng Stadium[J]. Journal of Building Structures, 2016, 37(6): 9-18. (in Chinese)
- [13] SHI Zhou, HU Hao, LI Jia-qi. Axis optimization of arch-shaped pylons for high-speed railway cable-stayed bridges[J]. Engineering Structures, 2021, 227: 111424.
- [14] NODARGI N A, BISEGNA P. Thrust line analysis revisited and applied to optimization of masonry arches[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 179: 105690.
- [15] MICHIELS T, NAPOLITANO R, ADRIAENSSENS S, et al. Comparison of thrust line analysis, limit state analysis and distinct element modeling to predict the collapse load and collapse mechanism of a rammed earth arch[J]. Engineering Structures, 2017, 148: 145-156.

- [16] NIKOLICH D. Thrust line analysis of triangular arches[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2020, 90(9): 1861-1874.
- [17] 任伟新,胡常福,上官兴,等.空腹式拱桥新型拱轴线研究[J].*交通科学与工程*,2010,26(2):26-30,47. REN Wei-xin, HU Chang-fu, SHANGGUAN Xing, et al. Research on new arch axis of open-spandrel arch bridge[J]. *Journal of Transport Science and Engineering*, 2010, 26(2): 26-30, 47. (in Chinese)
- [18] 胡常福,廖妙星.多源荷载作用下合理拱轴的近似解析[J].*华东交通大学学报*,2018,35(2):46-55. HU Chang-fu, LIAO Miao-xing. Approximate analytical solution for rational arch axis under multi-type loads[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2018, 35(2): 46-55. (in Chinese)
- [19] 唐春艳. T 构-系杆拱组合体系桥静力及动力性能研究[D].大连:大连理工大学,2018. TANG Chun-yan. Research on the static and dynamic characteristics of T-frame and tied arch composite bridge[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2018. (in Chinese)
- [20] LEWIS W J. Mathematical model of a moment-less arch[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2016, 472: 20160019.
- [21] GIL-MARTÍN L M, HERNÁNDEZ-MONTES E, PALOMARES A, et al. The optimum shape of an arch under non-symmetric loading conditions[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2016, 86(8): 1509-1520.
- [22] MARANO G C, TRENTADUE F, PETRONE F. Optimal arch shape solution under static vertical loads[J]. *Acta Mechanica*, 2014, 225(3): 679-686.
- [23] LEWIS W J. Constant stress arches and their design space[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical, and Engineering Sciences*, 2022, 478: 20210428.
- [24] 陈宝春,韦建刚,周俊,等.我国钢管混凝土拱桥应用现状与展望[J].*土木工程学报*,2017,50(6):50-61. CHEN Bao-chun, WEI Jian-gang, ZHOU Jun, et al. Application of concrete-filled steel tube arch bridges in China: current status and prospects[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2017, 50(6): 50-61. (in Chinese)
- [25] 易云焜. 梁拱组合体系设计理论关键问题研究[D].上海:同济大学,2007. YI Yun-kun. Key problem study for design theory of beam-arch association bridges[D]. Shanghai: Tongji University, 2007. (in Chinese)
- [26] SALONGA J, GAUVREAU P. Comparative study of the proportions, form, and efficiency of concrete arch bridges[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2014, 19(3): 04013010.